

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Магический, или волшебный квадрат — это квадратная таблица, заполненная числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.

Сумма чисел в каждой строке, столбце и на диагоналях, называется магической константой, М.

Наименьшая магическая константа волшебного квадрата 3x3 равна 15, квадрата 4x4 равна 34, квадрата 5x5 равна 65,

Если в квадрате равны суммы чисел только в строках и столбцах, то он называется полумагическим.

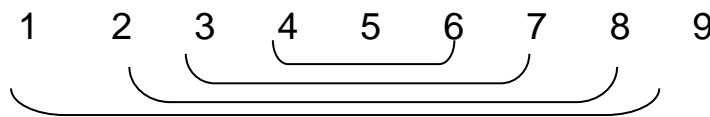
Построение волшебного квадрата 3 x 3 с наименьшей магической константой

Найдём наименьшую магическую константу волшебного квадрата 3x3 и числа, расположенного посередине этого квадрата.

1 способ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = (1+9) + (2+8) + (3+7) + (4+6) + 5 = 45$$

$$45 : 3 = 15$$



$$M = 15.$$

Число, записанное посередине $15 : 3 = 5$

Определили, что посередине, записано число 5.

2 способ

Можно рассчитать магическую константу по формуле, где n – число строк

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

$$n = 3 \quad \frac{n(n^2 + 1)}{2} = \frac{3(9 + 1)}{2} = 15$$

Если можешь построить один магический квадрат, то нетрудно построить их любое количество. Поэтому запомним приёмы построения магического квадрата 3x3 с константой 15.

1 способ построения. Расставь сначала по углам чётные числа 2,4,8,6 и посередине 5. Остальной процесс простая арифметика

2		4
	5	
6		8

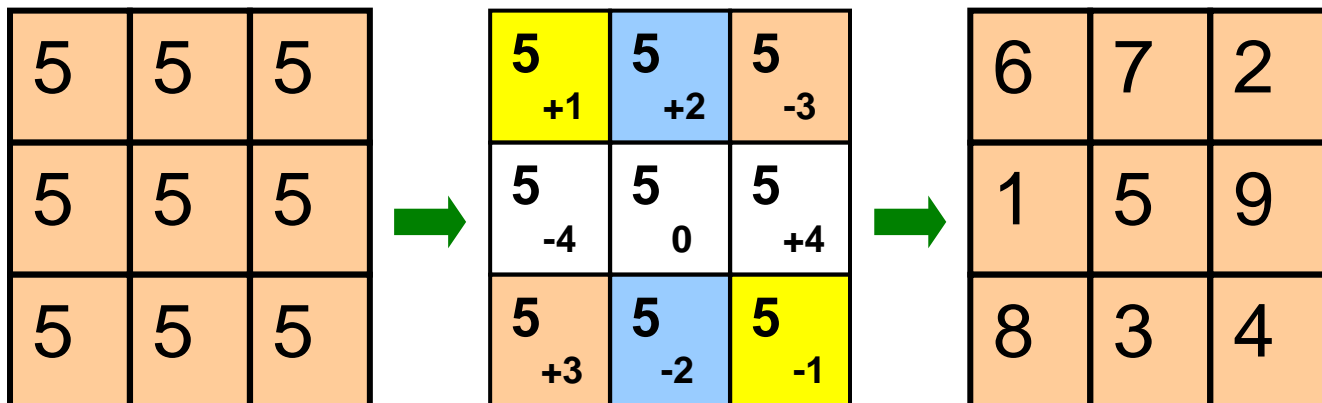
2	9	4
	5	
6	1	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

$$15 - 6 = 9; \quad 15 - 14 = 1$$

$$15 - 8 = 7; \quad 15 - 12 = 3$$

2 способ решения



Используя найденный волшебный квадрат с константой 15, можно задавать множество разноплановых заданий:

Пример. Построить новые различные волшебные квадраты 3 x 3

Решение.

Сложив каждое число волшебного квадрата, или умножив его на одно и тоже число, получим новый волшебный квадрат.

Пример 1. Построить магический квадрат 3 x 3, у которого число, расположенное посередине, равно 13.

Решение.

Построим знакомый волшебный квадрат с константой 15.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Найдём число, которое находится в середине искомого квадрата
 $13 - 5 = 8$.

К каждому числу волшебного квадрата прибавим по 8.

10	17	12
15	13	11
14	9	16

Пример 2. Заполнить клетки волшебных квадратов, зная магическую константу.

$$M = 42$$

Решение. Найдём число, записанное посередине $42 : 3 = 14$

	14	
13		20

8		
	14	
16		20

$$42 - 34 = 8,$$

8		12
	14	
16		20

$$42 - 30 = 12$$

8	22	12
	14	
16	6	20

$$42 - 20 = 22, 42 - 36 = 6$$

8	22	12
18	14	10
16	6	20

$$42 - 24 = 18, 42 - 32 = 10$$

задания для самостоятельного решения

Примеры. 1. Заполнить клетки волшебных квадратов с магической константой $M = 15$.

1)

4		
	5	1
2		6

2)

		6
	5	7
4		2

3)

		2
1	5	9
8		

2. Найди магическую константу волшебных квадратов.

1)

10	9	14
15	11	7
8	13	12

2)

10	3	8
5	7	9
6	11	4

3)

15	16	11
10	14	18
17	12	13

3. Заполнить клетки волшебных квадратов, зная магическую константу

1)

5		7
	4	11

$M = 24$

2)

	12	
6		
	8	

$M = 30$

3)

6		8
		12

$M = 27$

4. Построить волшебный квадрат 3x3, зная, что магическая константа равна 21.

Решение. Вспомним, как строится волшебный 3x3 квадрат по наименьшей константе 15. По крайним полям записываются чётные числа 2, 4, 6, 8, а в середине число 5 (15:3).

2		4
	5	
6		8

По условию надо построить квадрат по магической константе 21. В центре искомого квадрата должно быть число 7 (21:3). Найдём, насколько больше каждый член искомого квадрата каждого члена с наименьшей магической константой $7 - 5 = 2$. Строим искомый волшебный квадрат:

4		6
	7	
8		10

$$21 - (4 + 6) = 11$$

$$21 - (6 + 10) = 5$$

$$21 - (8 + 10) = 3$$

$$21 - (4 + 8) = 9$$

4	11	6
9	7	5
8	3	10

4. Построить волшебные квадраты 3x3, зная их магические константы

M = 42

M = 36

M = 33

M = 45

M = 40

M = 35

Построение волшебного квадрата 4 x 4 с наименьшей магической константой

Найдём наименьшую магическую константу волшебного квадрата 4x4 и числа, расположенного посередине этого квадрата.

1 способ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 =$$

$$(1+16)+(2+15)+(3+14)+(4+13)+(5+12)+(6+11)+(7+10)+(8+9) = 17 \times 8 = 136$$

$$136 : 4 = 34.$$

2 способ

Можно рассчитать магическую константу по формуле,
где n – число строк $n = 4$.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2} = \frac{4(16 + 1)}{2} = 34.$$

Сумма чисел на любой горизонтали, вертикали и диагонали равна 34. Эта сумма также встречается во всех угловых квадратах 2×2 , в центральном квадрате $(10+11+6+7)$, в квадрате из угловых клеток $(16+13+4+1)$.

Для построения любых волшебных квадратов 4x4 надо: построить один с константой 34.

Пример. Построить новые различные волшебные квадраты 4 x 4.

Решение.

Сложив каждое число найденного волшебного квадрата 4 x 4 или умножив его на одно и тоже число, получим новый волшебный квадрат.

Пример. Построить магический квадрат 4 x 4, у которого магическая константа равна 46.

Решение. Построили знакомый волшебный квадрат с константой 34.

$$46 - 34 = 12. \quad 12 : 4 = 3$$

К каждому числу волшебного квадрата прибавим по 3.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

19	6	5	16
8	13	14	11
12	9	10	15
7	18	17	4

Прежде чем приступить к решению более сложных примеров на волшебных квадратах 4 x 4 ещё раз проверь свойства, которыми он обладает, если M=34.

16 а	3 б	2 в	13 г
5 д	10 е	11 и	8 к
9 л	6 м	7 н	12 о
4 п	15 р	14 с	1 т

- 1) Сумма чисел на любой горизонтали, вертикали и диагонали равна 34.
 $a+b+v+g, a+d+l+p, a+e+n+t$
- 2) Эта сумма также встречается во всех угловых квадратах 2x2,
 $a+b+d+e, в+г+и+к, л+м+п+р, н+о+с+т$
- 3) в центральном квадрате (10+11+6+7),
 $e+i+m+n$
- 4) в квадрате из угловых клеток (16+13+4+1)
 $a+г+п+т$

Примеры. 1. Заполнить клетки волшебного квадрата с магической константой M =38.

17 а	б	в	г
д	е	12 и	к
10 л	7 м	н	13 о
п	16 р	с	т

$$\begin{aligned}
 н &= 38 - (10 + 7 + 13) = 8 \\
 е &= 38 - (12 + 7 + 8) = 11 \\
 б &= 38 - (11 + 7 + 16) = 4 \\
 \text{свойство } &1, 3, 1
 \end{aligned}$$

17 а	4 б	в	г
д	11 е	12 и	к
10 л	7 м	8 н	13 о
п	16 р	с	т

$$\begin{aligned}
 д &= 38 - (17 + 4 + 11) = 6 \\
 п &= 38 - (17 + 6 + 10) = 5 \\
 г &= 38 - (5 + 7 + 12) = 14 \\
 \text{свойства } &2, 1, 1
 \end{aligned}$$

17 а	4 б	в	14 г
6 д	11 е	12 и	к
10 л	7 м	8 н	13 о
5 п	16 р	с	т

$$\begin{aligned}
 в &= 38 - (17 + 4 + 14) = 3 \\
 с &= 38 - (3 + 12 + 8) = 15 \\
 к &= 38 - (6 + 11 + 12) = 9 \\
 т &= 38 - (14 + 9 + 13) = 2 \\
 \text{свойства } &1, 1, 1, 1
 \end{aligned}$$

Ответ.

17 а	4 б	3 в	14 г
6 д	11 е	12 и	9 к
10 л	7 м	8 н	13 о
5 п	16 р	15 с	2 т

Задания для самостоятельного решения

Заполнить клетки волшебного квадрата с если известна магическая константа

19			16
а	б	в	г
			11
д	е	и	к
	9	10	
л	м	н	о
7			
п	р	с	т

K = 46

а	б	в	г
11			
д	е	и	к
15		13	
л	м	н	о
	21	20	7
п	р	с	т

K = 58

		9	20
а	б	в	г
д	е	и	к
16	13		19
л	м	н	о
		21	
п	р	с	т

K = 62

Познакомьтесь с волшебными квадратами 5x5 и 6x6

1	15	24	8	17
9	18	2	11	25
12	21	10	19	3
20	4	13	22	6
23	7	16	5	14

n = 5,

$$M = \frac{n(n^2 + 1)}{2} = \frac{5(25 + 1)}{2} = 65.$$

M = 65

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

n = 6,

$$M = \frac{n(n^2 + 1)}{2} = \frac{6(36 + 1)}{2} = 111.$$

M = 111